Preparación Olimpiada Matemática Española

POLINOMIOS

03/12/2021

Ejercicio 1 (Calentamiento). Encontrar la suma de los coeficientes del polinomio que resulta al expandir $(5+x)^{2021}(7-x^2)$

Ejercicio 2 (Seminario de problemas Universidad Rioja). Probar que no existe un polinomio P con coeficientes enteros tal que $P(2016)=2017$ y $P(2021)=2020$.

Ejercicio 3 (Seminario de problemas Universidad Rioja). Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros. Supongamos que hay 3 enteros diferentes a, b, c tales que $P(a)=P(b)=P(c)=-1$. Probar que no existe ningún entero k tal que $P(k)=0$.

Ejercicio 4 (Fase local OME 2001). Sean a, b, y c números reales. Prueba que si x^3+ax^2+bx+c tiene tres raíces reales, entonces $3b \leq a^2$.

Ejercicio 5 (Seminario de problemas Universidad Rioja). Sea $P(x)$ un polinomio de grado 4 y sean $a \geq 1$ y $b \geq 1$ números reales distintos verificando $P(a)=P(1-a)$, $P(b)=P(1-b)$. Probar que $P(x)=P(1-x)$ para todo número real x.

Ejercicio 6 (Seminario de problemas Universidad Rioja). Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros tal que $P(2018)P(2019)=2021$. Probar que no existe ningún entero k tal que $P(k)=2020$.

Ejercicio 7 (Seminario de problemas Universidad Rioja). El polinomio $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, con coeficientes enteros, tiene n raíces enteras distintas. Las raíces son primos entre sí dos a dos. Prueba que $mcd(a_0,a_1)=1$.

Ejercicio 8 (Fase Regional India 2012). Encuentra todos los números reales no nulos a,b tales que los polinomios x^2+ax+b, x^2+x+ab, ax^2+x+b son todos distintos y tienen una única raíz común.

Ejercicio 9 (Fase Regional India 2012). Sean a y b números reales tales que $a \neq 0$. Prueba que no todas las raíces de $ax^4+bx^3+x^2+x+1=0$ son reales.

Ejercicio 10 (Fase Regional India 2013). Sean $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ y $g(x)=x^3+bx^2+cx+a$, donde a,b,c son enteros con $c \neq 0$. Supón que $f(1)=0$, y que las raíces de $g(x)$ son los cuadrados de las raíces de $f(x)$. Encuentra el valor de $a^{2013}+b^{2013}+c^{2013}$.

Ejercicio 11 (Fase Regional India 2014). Sean $P(x)=x^3+ax^2+b$ y $Q(x)=x^3+bx+a$, donde a y b son números reales no nulos. Supón que las raíces de $P(x)$ son los inversos de las raíces de $Q(x)$. Prueba que a y b son enteros. Encuentra el máximo común divisor de $P(2013!+1)$ y $Q(2013!+1)$.

Ejercicio 12 (Fase Regional India 2015). Sean $P_1(x)=x^2+a_1x+b_1$ y $P_2(x)=x^2+a_2x+b_2$ dos polinomios con coeficientes enteros. Supón que $a_1 \neq a_2$ y que existen enteros $m \neq n$ tales que $P_1(m)=P_2(n), P_2(m)=P_1(n)$. Prueba que a_1-a_2 es par.